13/12/2019

## Διακύμανση ή Διασπορά τ.μ.

**Ορισμός:** Έστω τ.μ. $X$ με μέση τιμή $\mu = E(x)$. Η διακύμανση ή διασπορά της τ.μ. $X$ συμβολίζεται με $\sigma^2$ ή $Var(x)$ και ορίζεται:

$$\sigma^2 = Var(x) \stackrel{\text{ορ.}}{=} E[(x-\mu)^2] \stackrel{\text{ορ.}}{=} \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 P_x(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_x(x)dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

**Ερμηνεία για τη διακύμανση**

Έστω $X$ διακριτή ομοιόμορφη κατανομή με τιμές $\{x_1, \dots, x_n\}$ και σ.μ.π. $P_x(x_i) = \frac{1}{n}$ $\forall i$

Έστω $\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_x(x_i) = \bar{x}$.

$$\sigma^2 = Var(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P_x(x_i) = \frac{(x_1-\mu)^2 + \dots + (x_n-\mu)^2}{n}$$


**Τυπική απόκλιση**

**Ορισμός:** $\sigma = +\sqrt{Var(x)}$

**Παρατήρηση:** Θα μπορούσε η Var να οριστεί

$$\sum_x |x-\mu| P_x(x)$$

ή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu| f_x(x)dx$$

Τεχνικές δυσκολίες της $|\cdot|$

**Πρόταση:** Αν $X$ μια τ.μ. τότε

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

**Απόδειξη:** $Var(x) \overset{\text{ορ.}}{=} E(x-\mu)^2 = E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) =$

$= E(x^2) - 2\mu E(x) + E(\mu^2) = E(x^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(x^2) - \mu^2 =$

$= E(x^2) - [E(x)]^2$

**Διακύμανση Συνάρτησης τ.μ.**

$$Var[g(x)] = E[g(x)]^2 - [E(g(x))]^2$$

**Ιδιότητες της διακύμανσης**

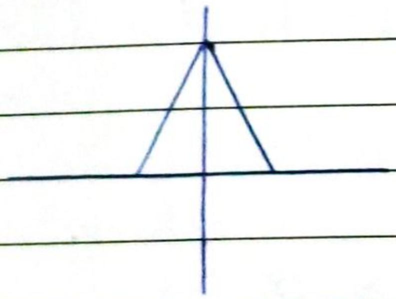
Αν $X$ τ.μ., $g$ πραγματική συνάρτηση και $a, b$ σταθερά

1) $Var(a) = 0$
2) $Var[ag(x) + b] = a^2 Var[g(x)]$

**Παράδειγμα 6.2.5:** $E(x) = ?$ $Var(x) = ?$ τριγωνικής κατανομής

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + x & , -1 < x < 0 \\ 1 - x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$



$E(x) = 0$ ?

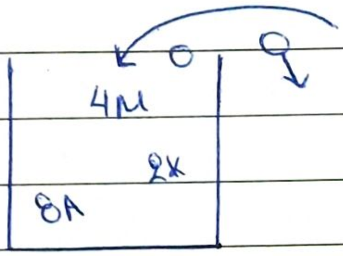
$E(x) = \int_{-1}^{1} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{1} f_X(x)\,dx = \dots = 0$ Ισχύει γενικότερα

**Πρόταση:** Αν η τ.μ. $X$ είναι συνεχής και η σ.π.π. $f_X$ είναι συμμετρική γύρω από το $a$ $\left(f_X(x+a) = f_X(a-x)\right)$ τότε $E(X) = a$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) \overset{\text{ορ.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2 f_X(x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{6}$$

**Παράδειγμα 6.2.7:**




Κερδίζει 2 → κάθε Μ
Χάνει 1 → κάθε Α
Ούτε κερδίζει ούτε χάνει → κάθε Κ

Δίκαιο $\overset{\text{ορ.}}{=}$ $E(\text{κέρδος}) = 0$
Είναι το παιχνίδι αυτό δίκαιο?
Ποια η Var του κέρδους?

Έστω $X$ κέρδος (τ.μ.)
Ζητώ ν.δ.ο. $E(X) = 0$
Τιμές $x$ της $X$ εξαρτώνται από την επιλογή σφαιρών

| Επιλογή σφαιρών | AA | AK ή KA | KK | AM ή MA | MK ή KM | MM |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Τιμές της $X$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $4$ |

$$P_X(-2) = P(X=-2) = P(AA) = \frac{8}{14}\cdot\frac{8}{14} = \frac{64}{196}$$

$$P_X(-1) = P(X=-1) = P(AK \text{ ή } KA) = 2\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{2}{14} = \frac{32}{196}$$

$$P_X(0) = P(X=0) = P(KK) = \frac{2}{14}\cdot\frac{2}{14} = \frac{4}{196}$$

$P_X(1) = P(X=1) = P(AM \text{ ή } MA) = 2 \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{14} = \frac{64}{196}$

$P_X(2) = P(X=2) = P(MK \text{ ή } KM) = 2 \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{14} = \frac{16}{196}$

$P_X(4) = P(X=4) = P(MM) = \frac{4}{14} \cdot \frac{4}{14} = \frac{16}{196}$

Άρα, $E(X) = \sum_x x P_X(x) = 0$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3,4286$

## Ροπές μιας τ.μ. και κατανομής

**Ορισμός:** (Απλές ροπές ή ροπές περί το μηδέν). Έστω X μια τ.μ. Η k-τάξης απλή ροπή (moment) ή ροπή περί το μηδέν της τ.μ. X με $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ συμβολίζεται με $\mu_k$ και ορίζεται

$$\mu_k = E(X^k) = \begin{cases} \sum_x x^k P_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx \end{cases}$$

Παρατήρηση: Αν $k=1$ τότε $\mu_1 = E(X)$

**Ορισμός:** (Κεντρικές Ροπές ή Ροπές περί τη μέση τιμή). Έστω τ.μ. X με μέση τιμή μ. Η k-τάξη κεντρική ροπή της k συμβολίζεται με $V_k$ και ορίζεται:

$$V_k = E(X-\mu)^k = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 P_X(x) & , X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Παρατήρηση: Αν $k=2$ τότε $V_2 = Var(X)$

## Σχέση μεταξύ Απλών - Κεντρικών Ροπών

**Πρόταση:** $\nu_k = \sum_{x=0}^{k} (-1)^x \binom{k}{r} \mu_1^r \mu_{k-r}$ , $k = 1, 2, \ldots$

**Απόδειξη:** Διώνυμο Νεύτωνα

**Πρόταση:** Έστω τ.μ. $X$ συνεχής με σ.π.π. $f_X$ συμμετρική γύρω από τη $\mu = E(X)$. Τότε $\nu_k = 0$ , $k = 2n+1$ , $n = 0, 1, 2, \ldots$

Συντελεστής λοξότητας:

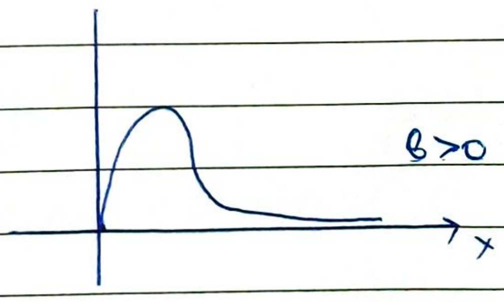
$\beta = \frac{\nu_3}{\sigma^3}$ , $\sigma = +\sqrt{Var(X)}$

Αν η $f_X$ συμμετρική τότε $\beta = 0$

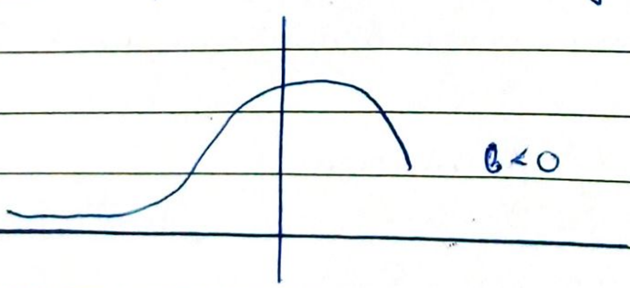
(Το αντίστροφο δεν ισχύει)

Αν $\beta \neq 0$ , τότε η $f_X$ δεν είναι συμμετρική

Αν $\beta > 0$ , τότε η $f_X$ λοξή δεξιά




Αν $\beta < 0$ , τότε η $f_X$ λοξή αριστερά



# Ροπογεννήτρια

**Ορισμός:** Έστω τ.μ. $X$. Η ροπογεννήτρια της $X$ συμβολίζεται με $m_X(t)$ και ορίζεται

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p_X(x) , & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx , & X \text{ συνεχής} \end{cases} , \forall t \in \mathbb{R}$$

**Παρατήρηση:** ① Αν $t=0$, τότε $m_X(0)=1$

② $m_{aX+b} \overset{\text{ορ.}}{=} E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{tb} e^{taX}) = e^{tb} E(e^{taX}) = e^{tb} m_X(at)$, $t \in \mathbb{R}$

③ $m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx$

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} e^{tx}\right) f_X(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f_X(x)dx$$

$$\frac{d^k}{dt^k} m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{tx} f_X(x)dx$$

$$\frac{d^k}{dt^k} m_X(t) \Big|_{t=0} = \mu_k$$

Ισχύει το αντίστροφο

$$m_X(t) \overset{\text{ορ.}}{=} E(e^{tX}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mu_k$$

**Θεώρημα Μονοσημάντου των Ροπογεννητριών:** Έστω οι τ.μ. X και Y με α.σ.κ $F_X$ και $F_Y$. Αν οι ροπογεννήτριες $m_X(t)$ και $m_Y(t)$ υπάρχουν και $m_X(t) = m_Y(t)$ για $|t| < c$, $c > 0$ σταθερά τότε:

$$F_X(x) = F_Y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

## Ανισότητες Markov - Chebyshev

**Πρόταση:** α) Ανισότητα Markov: Έστω τ.μ. $X \geq 0$ με $\mu = E(X)$. Τότε για κάθε $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad \text{ή} \quad P(X < a) \geq 1 - \frac{E(X)}{a}$$

β) Ανισότητα Chebyshev: Έστω X τ.μ. με $\mu = E(X)$ και $\sigma^2 = Var(X)$. Τότε $\forall a > 0$

$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2} \quad \text{ή} \quad P(|X-\mu| < a) \geq 1 - \frac{Var(X)}{a^2}$$

**Απόδειξη:** α) Ορίζουμε τ.μ. $Y = \begin{cases} a, & X \geq a \\ 0, & X < a \end{cases}$

Τότε $Y \leq X$, οπότε $E(Y) \leq E(X)$

$$E(Y) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} a\,P(Y = a) + 0\,P(Y=0) = a\,P(X \geq a)$$

$$\overset{a>0}{\Longrightarrow} P(X \geq a) = \frac{E(Y)}{a} \leq \frac{E(X)}{a}$$

β) $P(|X-\mu| \geq a) = P((X-\mu)^2 \geq a^2) \leq \dfrac{E(X-\mu)^2}{a^2}$

**Παρατηρήσεις:** (i) Για την τ.μ. X ισχύουν

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}, \quad a > 0$$

(ii) Αν $X > 0$ τότε $P(X^k \geq a) \leq \dfrac{E(X^k)}{a}$

(iii) $P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ ή $P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

(iv) $P(X \geq a) \leq \inf\{e^{-at} m_X(t), \ t \geq 0\}$ (+ Απόδειξη)

Παράδειγμα 6.5.3: $X \sim B(n=16, p=0,5)$. Κάτω φράγμα

$X \sim B(n=16, p=0,5)$

$$P_X(x) = \binom{16}{x} 0,5^{16} (1-0,5)^{16-x} = \binom{16}{x} 0,5^{16}, \quad x = 0,1,\dots,16$$

$$P(4 < X < 12) = \sum_{x=5}^{11} P(X=x) = \sum_{x=5}^{11} P_X(x) = \sum_{x=5}^{11} \binom{16}{x} 0,5^{16} = 0,9234$$

Κάτω Φράγμα

Αφού $X \sim B(n=16, p=0,5)$ $\left\{ \begin{array}{l} \mu = E(X) = np = 8 \\ \sigma^2 = Var(X) = npq = 16 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 4 \end{array} \right.$

Εφαρμόζω Chebyshev

$$P(4 < X < 12) = P(4-8 < X-8 < 12-8) = P(-4 < X-8 < 4) =$$

$$= P(|X-8| < \underbrace{4}_{\overset{\sigma}{2} \cdot \overset{k}{2}}) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Παράδειγμα 6.5.5: Αρκεί να βρω

$$P(1 \leq X \leq 5) = P(1-3 \leq X-3 \leq 5-3) = P(-2 \leq X-3 \leq 2) =$$

$$= P(|X-3| \leq 2) = P(|X-3| \leq k\sigma = 4 \cdot \tfrac{1}{2}) \geq 1 - \frac{1}{4^2} = 1 - \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{15}{16} = 0,9375$$